

Едно математическо предизвикателство на XXI век

Сава Грозев

Управлението на CMI се осъществява от Борд на директорите, в който влизат членове на фамилията Клей, а чисто научните въпроси се решават от Научен съвет. Понастоящем президент на CMI е Ник Уудхаус (Wodehouse)

от Оксфордския университет (световноизвестен специалист по туистори и квантова теория на полето), а членове на Научния съвет са: сър Ендрю Уайлс (Wiles) от Университета в Принстън (известен с доказателството на Великата теорема на Ферма), сър Саймън Доналдсън (Donaldson) от Империял Колидж в Лондон (Фийлдсов медалист за 1986 г.), Ричард Мелроуз (Melrose) от Масачузетския институт по технологии (световноизвестен специа-

През 1998 г. американският възпитаник на Харвардския колеж Ленгън Клей (Clay), преуспял бизнесмен и филантроп, основава Clay Mathematical Institute (CMI) – Математически институт Клей. Главната цел на института е да популяризира математиката и да стимулира нейното развитие.

лист по теория на разсейването и частните диференциални уравнения), Андрей Оунков от Колумбийския университет (Фийлдсов медалист за 2006 г.) и Юм Тонг Сиу (Siu) от Харвардския университет (световноизвестен

специалист по функции на много комплексни променливи). Най-атрактивно измежду многото инициативи и дейности на CMI е обявяването на Седемте математически предизвикателства на XXI в. Това се случва на 24 май 2000 г. в Колеж дьо Франс в Париж. Сто години преди това, по време на Международния математически конгрес в Париж през 1900 г. големият немски математик Давид Хилберт (Hilbert, 1862 – 1943) формулира 23 проблема – предизвикател-



ства за математиците на XX в. Един от проблемите на Хилберт, т.нар. *хипотеза на Риман*, фигурира и сред Седемте предизвикателства на СМІ. За него, както и за всяко от останалите шест, е предвидена награда в размер на 1 млн. щ. долара. На 18 март 2010 г. СМІ обявява, че един от проблемите е разрешен. Руският математик Григорий Перелман (р. 13 юни 1966 г. в Санкт Петербург) успява да докаже т.нар. хипотеза на Поанкаре. Няколко седмици след присъждане на наградата Перелман официално отказва да получи 1 млн. долара, заявявайки, че не са му нужни слава и пари. Разглежданията по-долу са посветени на *хипотезата на Поанкаре*. През 1904 г. големият френски математик Анри Поанкаре (Poincaré, 1854 – 1912) формулира своята хипотеза: *Всяко свързано, едносвързано и компактно тримерно многообразие без край е хомеоморфно на тримерната сфера*. Ще изясним понятията във формулировката на хипотезата на интуитивно ниво.

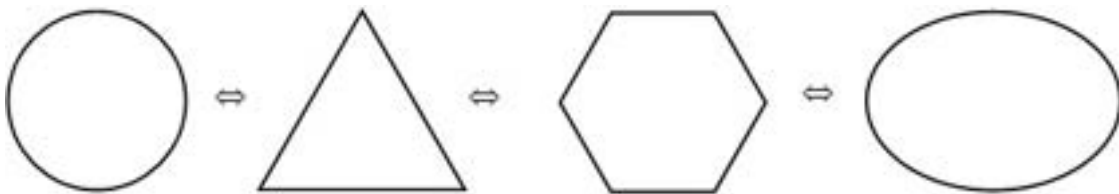
Хомеоморфизъм е взаимно-еднозначно и взаимно-непрекъснато съответствие между две множества. Интуитивно хомеоморфизмът представлява плавна деформация без разкъсвания и слепвания – показаният пример е свързан с преобразуване на чаша до фигура с формата на геврек (на математически език повърхнината на геврека се нарича *тор*). Хомеоморфизмът е *непрекъснатата деформация*. В примера можем да си мислим, че чашата е направена от пластилин. Постепенно „издърпваме“ дъното и чашата става плътна (втората картинка). След това „смачкваме“ тялото на чашата (трета и четвърта картинка) и стигаме до геврека (последната картинка).

Онази област от математиката, която изучава свойствата, оставащи непроме-



Сава Гроздев е професор в Института по математика и информатика при БАН. Той е доктор по математика, доктор на педагогическите науки, доктор хонорис кауза на Русенския и Пловдивския университет и почетен професор на Югозападния университет. Главен редактор е на научно-педагогическото сп. „Математика и информатика“, както и на сп. „Математика плюс“. Създател е на математически модел за подготовка на участници в олимпиади.

нени при хомеоморфизми, се нарича *топология*. От гледна точка на топологията показаните по-горе чаша и геврек са неразличими. Неразличими са също окръжността и квадрата, както и по-общо – окръжността и произволна затворена крива линия: триъгълник, многоъгълник, елипса и т.н. Всяка от показаните фигури се получава от коя да е друга чрез подходящо „прегъване“ за генериране на ъглови точки или „изправяне“ за премахване на такива точки.



По-нататък ще разглеждаме тримерни обекти, т.е. обекти, които имат 3 измерения, напр. плътен куб, кълбо, геврек (т.е. тор заедно с вътрешността му), цялото тримерно пространство (което означаваме с R^3) и т.н. Такива обекти се наричат *тримерни многообразия*. За да направим разлика, ще споменем, че двумерни многообразия са кръгът, торът, сферата в R^3 , равнината R^2 и т.н. Едномерни са правата линия, отсечката, окръжността и др. Ще се интересуваме от *тримерни многообразия без край*. Примери за такива многообразия са вътрешността на плътния куб, вътрешността на геврека, цялото R^3 и др. Математическата дефиниция на тримерно многообразие без край е следната: това е такова тримерно многообразие, което съдържа в себе си всяка своя точка заедно с достатъчно малко кълбо с център точката. Аналогични са дефинициите в двумерния и едномерния случай, при които кълбото се заменя съответно с кръг и интервал.

Едно многообразие е *свързано*, ако всеки две негови точки могат да бъдат съединени с непрекъсната линия, точките на която са от многообразието. Остров в океана е свързано многообразие, но съвкупността на два острова вече не е свързано (не е възможно да свържем двата острова с линия, оставайки на сушата). Интуитивно многообразието е свързано, когато е съставено само от една част. Съвкупността от двата острова е съставена от две части и затова не е свързано многообразие.

Едно многообразие е *едносвързано*, ако всяка непрекъсната затворена линия от негови точки може да се свие (стегне) до точка без напускане на многообразието. Обръщаме внимание на думата „може“ в тази интуитивна дефиниция, която означава, че съществува подходящо (а не произволно) свиване на линията до точка. Кълбото например е едносвързано многообразие, геврекът и обикновената сфера (която е двумерно многообразие) – също. Но окръжността, квадърът, многоъгълникът и торът вече не са едносвързани. Кръгът обаче е едносвързано (двумерно) многообразие.

Едно многообразие е *компактно*, ако всеки

негов хомеоморфен образ е с крайни размери. Затвореният интервал върху правата е компактно многообразие (едномерно) за разлика от отворения интервал, който не е компактно, защото може да се „разтегне“ до права линия. От гледна точка на топологията има само две едномерни свързани многообразия без край. Това са правата линия и окръжността, като единствено окръжността е компактно многообразие. За да не се остава с впечатление, че всяко множество е многообразие, ще посочим, че две пресичащи се прави не представляват многообразие. Причината е, че за общата точка на двете прави не съществува интервал, който да съдържа точката и самият той да се съдържа в множеството (в случая всяка околност на точката е кръстче).

И така, окръжността е единственото едномерно свързано компактно многообразие без край. В същото време двумерните свързани компактни многообразия са безброй много. Тези, които са без край, са класифицирани и добре изучени. Всяко едно от тях може да се получи от сфера чрез „запелване“ на гръжки. Показаната сфера е с 3 гръжки и се нарича *сфера (повърхнина) от трети род*



(броят на гръжките определя рода).

Сферата без гръжки (т.е. двумерната сфера, която се означава с S^2) е повърхнина от нулев род, а торът е хомеоморфен на сфера с една гръжка и следователно е по-

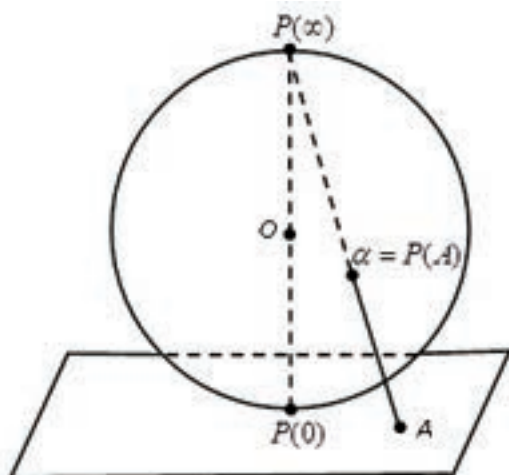
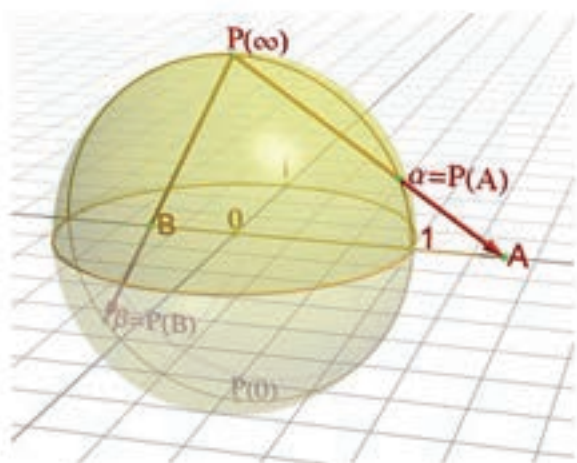
върхунина от първи род. За да се убедим в това, достатъчно е да разгледаме отново примера с чашата и геврека, но сега да си мислим, че чашата от втората картинка и нейната гръжка са кухи. Самата чаша може да се преобразува до сфера, а гръжката ѝ остава. Да забележим още, че сферата без гръжки се отличава от сферите с гръжки (т.е. една повърхунина от нулев род се отличава от повърхнините от по-висок род) по това, че е едносвързана.

В двумерния случай стигаме до извода, че от гледна точка на топологията обикновената сфера S^2 е единственото свързано, едносвързано и компактно двумерно многообразие без край. Следователно хипотезата на Поанкаре е аналог на този факт, но в тримерния случай. Тримерните компактни многообразия без край също могат да се класифицират. При това ролята на тримерната сфера, която се означава с S^3 , е аналогична на ролята на двумерната сфера S^2 при двумерните многообразия. Не е трудно да се докаже, че S^3 е едносвързано многообразие. Обратното обаче, да се установи, че едносвързаността е уникална за S^3 , е сложна задача и именно в това се състои трудността в доказателството на хипотезата на Поанкаре. Двумерната сфера S^2 е подмножество на R^3 и може например да се визуализира, докато тримерната сфера S^3 е подмножество на 4-мерното пространство, което я прави сложен обект. Ще изложим идеята на доказателството на хипотеза-

та на Поанкаре, предложено от Перелман, но поради сложността ще се ограничим с примери-аналози от едномерните и двумерните многообразия.

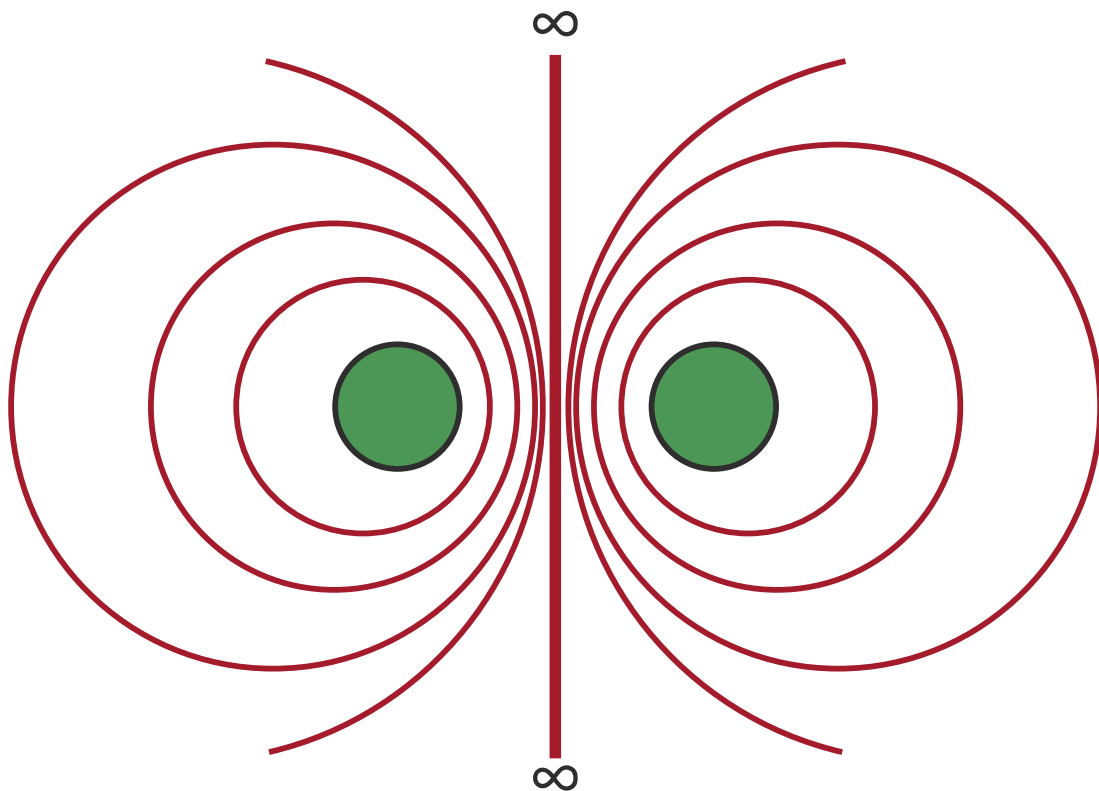
Един от най-подходящите начини да се обясни топологичната структура на тримерната сфера S^3 е с помощта на т.нар. едноточкова компактификация на познатото тримерно пространство R^3 . Да вземем правата линия, която е едномерен аналог на R^3 , и да добавим безкрайната точка към нея. Интуитивно можем да си мислим, че безкрайната точка е такава точка върху разглежданата права, към която се приближава коя да е точка от правата, отдалечавайки се произволно по коя да е от двете възможни посоки върху правата. Както беше отбелязано по-горе, между правата и отворения интервал няма разлика от топологична гледна точка. В същото време бихме могли да създадем отсечката непрекъснато и да приближаваме двата ѝ края, сливайки ги в безкрайната точка. По този начин получаваме окръжност, която е едномерен аналог на S^2 . По подобен начин, ако разгледаме равнината и добавим безкрайна точка като точка, към която се приближават всички прави от равнината с произволни направления, ще получим стандартната двумерна сфера S^2 .

Нека сферата S^2 е с център O и полюси, съответно северен $P(\infty)$ и южен $P(0)$. На всяка точка $\alpha = P(A)$ от сферата, различна от северния полюс, да съпоставим точка A



от равнината, която се допира до сферата в южния ѝ полюс. Точката A е прободът с равнината на правата през северния полюс и $\alpha = P(A)$. Така дефинираното изображение е добре известната стереографска проекция. На втория чертеж е показано сечение на сферата S^2 с равнина през полюсите. Така получаваме, че сферата без една нейна точка (северния полюс) съвпада топологически с равнината и обратно – добавянето на една точка към равнината (безкрайната точка) я превръща в сфера, като в този случай накратко казваме, че опаковаме сферата с нейната допирателна равнина през $P(O)$.

но многообразие, което служи и за дефиниция на S^3 . Изучаването на структурата на S^3 е нелека задача, защото е необходимо излизане в четиримерно пространство и това усложнява ситуацията. Живеем в тримерен свят и четвъртото измерение е необозримо. Все пак, бихме могли да разсъждаваме по следния начин. Да вложим геврека в R^3 и да разгледаме оста му на въртене. Произволна равнина през оста пресича геврека в два кръга (на чертежа те са запълнени). Допълнението на кръговете в сечащата равнина може да се разбие непрекъснато на семейство окръжности. Към тях се отнася и оста, защото в S^3 тя се превръ-



По аналогичен начин се постъпва и с тримерната сфера S^3 : към познатото тримерно пространство R^3 се добавя безкрайната точка, в която интуитивно се попада при движение по коя да е права с произволно направление. Получаваме тримерно компакт-

ща в окръжност посредством безкрайната точка. Представянето на S^3 като тримерно многообразие ще се получи, ако завъртим показаната двумерна картинка около оста.

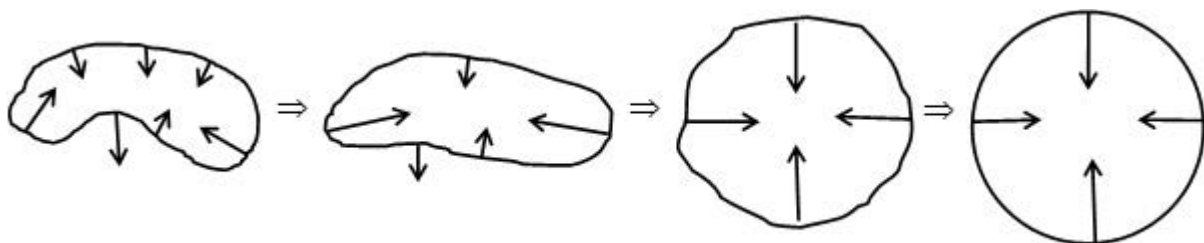
Установихме, че съществуват едновързани и неедновързани тримерни компакт-

ни многообразия, които са свързани и са без край. Перелман доказва, че едносвързаното е единствено. Доказателството използва т.нар. поток на Ричи (по името на италианския математик Грегорио Ричи (Ricci, 1853 – 1925), създател на тензорното смятане. Известна идея за това понятие може да се придобие чрез влагане на едномерно многообразие в равнината.

Да разгледаме гладка затворена крива в равнината и да изберем направление върху нея. Ще се интересуваме от допирателните единични вектори във всяка точка на кривата. При обхождане на кривата векторите ще се въртят с някаква ъглова

представим, че всяка точка от кривата се движи по направление на съответния нормален вектор със скорост, която е пропорционална на дължината му, т.е. на кривината в точката. Наблюдаваме еволюция на кривата и в резултат кривата се „раздува“. Няколко етапа на „раздуването“ изглеждат схематично по показания начин.

В крайна сметка произволната затворена крива се превръща (еволюира) в окръжност. Това е и доказателство на аналога на хипотезата на Поанкаре в едномерния случай. Макар че съществува и по-просто, изложението илюстрира какво става в примерния случай.



скорост, която се нарича кривина. Там, където кривата е стръмна, кривината ще бъде по-голяма по абсолютна стойност, а там, където кривата е полежата, кривината ще е по-малка. По-нататък забравяме за допирателните вектори и вместо тях във всяка точка разглеждаме нормален вектор с дължина, равна на кривината в тази точка и посока навътре, ако кривината е положителна, или навън, ако кривината е отрицателна. Трябва да имаме предвид, че кривината се приема за положителна в точките, където кривата е изпъкнала, и отрицателна, където кривата е вдлъбната. В първия случай допирателният вектор е разположен във външността на затворената крива, а във втория – в нейната вътрешност. Там, където изпъкналостта се променя във вдлъбнатост или обратното, кривината е равна на нула. Например окръжност с радиус 1 има положителна кривина, равна на 1, ако пресмятанятията са в радиани. Нека си

Идеята да се използва потокът на Ричи, по който да протича еволюцията на тримерното многообразие до превръщането му в сферата S^3 , принадлежи на американския математик Ричард Хамилтън (Hamilton) и датира от 1981 г. Оказва се обаче, че това невинаги е така, защото в тримерния случай е възможно потокът на Ричи така да промени многообразието, че то вече да не е многообразие, а някакъв обект с особени точки по подобие на двете пресекателни прави, споменати по-горе (общата точка на които е особена). Заслугата на Перелман е в това, че преодолявайки неимоверни технически трудности с помощта на апарата на частните диференциални уравнения, той успява да внесе съществени поправки в потока на Ричи и да докаже хипотезата на Поанкаре. ■

Авторът изказва благодарност на акад. Петър Попиванов за направените забележки и уточнения.